Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 178-181

© **А.Г. ХОХЛОВ, С.Д. ШАЛАГИНОВ**
Тюменский государственный университет
Alexejhohlov@yandex.ru, SHALA@utmn.ru

УДК 512.12

К ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

ON THE THEORY OF PLANE FIXED POINTS

АННОТАЦИЯ. Дается новое доказательство примера, показывающего, что всякий связный компакт, разделяющий плоскость, имеет неподвижную точку. При этом не используются глубокие результаты ни теории неподвижных точек, ни функционального анализа.

SUMMARY. The article presents a new proof of the case showing that any connected compact separating the plane has a fixed point. The provided proof does not use the fundamental results of the fixed point theory or functional analysis.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Плоскость, связный компакт, неподвижная точка.
KEY WORDS. Plane, connected compact, fixed point.

Хорошо известна проблема, поставленная еще в 1930 г. Аренсом (Arens): каждый ли связный компакт, не разделяющий плоскость, имеет неподвижную точку? Эта проблема была названа самой интересной и выдающейся задачей топологии на плоскости. На сегодняшний день все существующие примеры показывают, что связный компакт, не разделяющий плоскость, обладает свойством неподвижной точки.

Напомним, что точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $f : X \to X$, если $f(x) = x$. Говорят, что множество X обладает свойством неподвижной точки, если каждое непрерывное отображение $f : X \to X$ этого множества в себя имеет неподвижную точку.

Легко видеть, что окружность не обладает свойством неподвижной точки: при повороте, например, на угол $\pi/2$ все точки ее смещаются. Но окружность разделяет плоскость. Естественное предположение, что всякий связный компакт, разделяющий плоскость, не обладает свойством неподвижной точки, неверно, как показывает следующий известный пример, новое доказательство которого, не использующее глубоких результатов теории неподвижных точек и функционального анализа, приводится в настоящей заметке.

$$X=\overline{\left\{\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right):x\in(0,1]\right\}}\cup\{(x,1+x(1-x)):x\in[0,1]\}=$$

$$=\left\{\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right):x\in(0,1]\right\}\cup(\{0\}\times[-1,1])\cup\{(x,1+x(1-x)):x\in[0,1]\}$$

$$1)\ p:\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right)\mapsto x-\text{гомеоморфизм }\Gamma=\left\{\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right):x\in(0,1]\right\}$$

на $(0,1]$. Следовательно, все связные подмножества Γ либо одноэлементны, либо при p отображаются на выпуклые подмножества $(0,1]$ (в R связное $\equiv$ выпуклое).

$$T_1=\left\{\frac{1}{1+4k},\ k\in N\right\},\quad T_2=\left\{\frac{1}{3+4k},\ k\in N\right\}.$$

$$\sin\frac{\pi}{2x}=1,\ x\in T_1;\quad \sin\frac{\pi}{2x}=-1,\ x\in T_2.$$

Если A — связное множество в Γ таково, что $\pi(A)\cap T_1\neq\varnothing$ и $\pi(A)\cap T_2\neq\varnothing$, то diam $A>2$.

2) Теорема Кантора: $f:X\to X$, где f — непрерывно, X, Y — метрические пространства, X — компакт, то f равномерно непрерывно.

3) Не существует непрерывного отображения $\varphi:[0,1]\to X$ такого, что $\varphi(0)\in\Gamma$, $\varphi(1)\notin\Gamma$.

Предположим противное. Для $\varepsilon=1$ подберем $\delta>0$ такое, что diam $\varphi(B)<1$, если diam $B<\delta$ (в силу равномерной непрерывности). Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}$ на части с $\Delta x_i<\delta$. Тогда $\operatorname{diam}[x_{i-1},x_i]<1$. В силу 1) связное подмножество в Γ $\varphi[0,x_i]$ таково, что $p(\varphi[0,x_i])$ пересекает либо T_1, либо T_2, но не оба вместе. Аналогично ведет себя и $\varphi[x_1,x_2]$, и т.д. Получим, что весь отрезок $[0,1]$ уйдет в Γ, т.е. противоречие.

Таким образом, для всякого непрерывного отображения $\varphi:[0,1]\to X$ будет выполнено либо $\varphi([0,1])\subset\Gamma$, либо $\varphi([0,1])\cap\Gamma=\varnothing$.

Пусть $g:X\to X$ — непрерывное отображение. Если $g(\{0\}\times[-1,1])\subset\{0\}\times[-1,1]$, то по теореме Брауэра имеется неподвижная точка.

Пусть $g(\{0\}\times[-1,1])\cap\{0\}\times[-1,1]=\varnothing$. Тогда $g(\{0\}\times[-1,1])\subset\Gamma$. Тогда и $g(X)\subset\Gamma$, и это связный компакт, следовательно, $p(g(X))=[\alpha,\beta]\subset(0,1]$. Тогда

$$g\left(\left\{\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right):\alpha\le x\le\beta\right\}\right)\subset\left\{\left(x,\sin\frac{\pi}{2x}\right):\alpha\le x\le\beta\right\}.$$

По теореме Брауэра имеется неподвижная точка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dugundji, J., Granas, A. Fixed point theory. NY.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.

2. Hagopian, Ch.L. Fixed-point Problem in Continuum Theory //Contemporary Math. 1991. Vol. 117. Pp. 79-86.

3. Klee, V., Wagon, S. Old and New Unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory // Dolciani Mathematical Expositions. Washington, DS: Math. Assoc. Amer., 1991. Vol. 11. 340 p.

4. Akis, V.N. On the plane fixed point problem // Topology Proc. 1999. Vol. 24. Pp. 15-31.

5. Bell, H. On fixed point properties of plane Continua. // Tranc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 128. Pp. 539-548.

6. Bellamy, D.P. A tree-like Continuum without the fixed point property. // Nonstom J. Math. 1979. Vol. 6. Pp. 1-13.

7. Minc, P. A fixed point theorem for weakly chainable plane continua. // Tranc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 317. Pp. 303-312.

8. Mill, Y., van, Reed, G.M. Open Problems In Topology. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1990. Pp. 354-357.

9. Kiang, T. Theory of Fixed Point. Berlin: Classes, Springer, 1989. 424 p.

10. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. 352 с.

11. Энгелькинг Р. Общая топология. Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 752 с.

REFERENCES

1. Dugundji, J., Granas, A. Fixed point theory. NY.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.

2. Hagopian, Ch.L. Fixed-point Problem in Continuum Theory. *Contemporary Math*. 1991. Vol. 117. Pp. 79-86.

3. Klee, V., Wagon, S. Old and New Unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory // Dolciani Mathematical Expositions. Washington, DS: Math. Assoc. Amer., 1991. Vol. 11. 340 p.

4. Akis, V.N. On the plane fixed point problem. *Topology Proc*. 1999. Vol. 24. Pp. 15-31.

5. Bell, H. On fixed point properties of plane Continua. *Tranc. Amer. Math. Soc*. 1967. Vol. 128. Pp. 539-548.

6. Bellamy, D.P. A tree-like Continuum without the fixed point property. *Nonstom J. Math*. 1979. Vol. 6. Pp. 1-13.

7. Minc, P. A fixed point theorem for weakly chainable plane continua. *Tranc. Amer. Math. Soc*. 1990. Vol. 317. Pp. 303-312.

8. Mill, Y., van, Reed, G.M. Open Problems In Topology. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1990. Pp. 354-357.

9. Kiang, T. Theory of Fixed Point. Berlin: Classes, Springer, 1989. 424 p.

10. Prasolov, V.V. *Elementy kombinatornoi i differentsial'noi topologii* [The elements of combinatorial and differential topology]. Moscow, 2004. 352 p. (in Russian).

11. Engel'king, R. *Obshchaia topologiia* [General topology] / Transl. fr. Eng. by M. Ya. Antonovsky, A.V. Arkhangelsky. Moscow, 1986. 752 p. (in Russian).

Авторы публикации

Хохлов Алексей Григорьевич — доцент кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Шалагинов Сергей Дмитриевич — доцент кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Authors of the publication

Aleksey G. Khokhlov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University

Sergey D. Shalaginov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University